ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 1: Logica Matematica

1.3 Semantica della logica proposizionale

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

9 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito" (semanticamente: **non significa** nulla, **non** ha **senso**)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito" (semanticamente: **non significa** nulla, **non** ha **senso**)
- "L'attuale re di Francia è calvo"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito" (semanticamente: **non significa** nulla, **non** ha **senso**)
- "L'attuale re di Francia è calvo" (semanticamente: ha **senso**, ma **non significa** nulla)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito" (semanticamente: **non significa** nulla, **non** ha **senso**)
- "L'attuale re di Francia è calvo" (semanticamente: ha **senso**, ma **non significa** nulla)
- "Il prato è fiorito" (semanticamente: ha **senso** e ha **significato**)

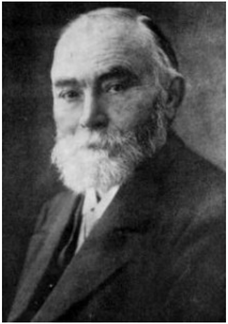
Linguaggio: Sintassi e Semantica

Esempi (Semantica del linguaggio naturale)

- "Il gatto è fiorito" (semanticamente: **non significa** nulla, **non** ha **senso**)
- "L'attuale re di Francia è calvo" (semanticamente: ha **senso**, ma **non significa** nulla)
- "Il prato è fiorito" (semanticamente: ha **senso** e ha **significato**)

Gottlob Frege (1892) distingueva tre diversi modi di intendere il "significare":

- **Senso** (*Sinn*)
- **Significato** o denotato o referente (*Bedeutung*)
- **Rappresentazione** soggettiva (*Vorstellung*)



Sistema di valutazione

Definizione: Sistema di valutazione

Il *sistema di valutazione* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O} \rangle$ della logica proposizionale è definito da

- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, l'insieme dei valori di verità;
- $\mathcal{T} = \{1\}$, l'insieme dei valori che indicano il vero;

Sistema di valutazione

Definizione: Sistema di valutazione

Il *sistema di valutazione* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O} \rangle$ della logica proposizionale è definito da

- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, l'insieme dei valori di verità;
- $\mathcal{T} = \{1\}$, l'insieme dei valori che indicano il vero;
- $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_{\neg}, \mathcal{O}_{\wedge}, \mathcal{O}_{\vee}, \mathcal{O}_{\rightarrow}, \mathcal{O}_{\leftrightarrow}\}$, una funzione per ciascun connettivo:
  - $\mathcal{O}_{\neg} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione unaria)
  - $\mathcal{O}_{\circ} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ (funzione binaria).

Funzioni di valutazione

Definizione: Funzione di negazione

$\mathcal{O}_\neg : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ (funzione unaria)

$$\mathcal{O}_\neg(1) = 0$$

$$\mathcal{O}_\neg(0) = 1$$

Funzioni di valutazione

Definizione: Funzione di negazione

$\mathcal{O}_{\neg} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione unaria)

$$\mathcal{O}_{\neg}(1) = 0$$

$$\mathcal{O}_{\neg}(0) = 1$$

Definizione: Funzione di congiunzione

$\mathcal{O}_{\wedge} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione binaria)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\wedge}(0,0) &= 0 \\ \mathcal{O}_{\wedge}(0,1) &= 0 \\ \mathcal{O}_{\wedge}(1,0) &= 0 \\ \mathcal{O}_{\wedge}(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Funzioni di valutazione

Definizione: Funzione di disgiunzione

$\mathcal{O}_{\vee} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione binaria)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\vee}(0,0) = 0\\ \mathcal{O}_{\vee}(0,1) = 1\\ \mathcal{O}_{\vee}(1,0) = 1\\ \mathcal{O}_{\vee}(1,1) = 1\end{aligned}$$

Funzioni di valutazione

Definizione: Funzione di disgiunzione

$\mathcal{O}_\vee : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione binaria)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\vee(0,0) &= 0\\ \mathcal{O}_\vee(0,1) &= 1\\ \mathcal{O}_\vee(1,0) &= 1\\ \mathcal{O}_\vee(1,1) &= 1\end{aligned}$$

Definizione: Funzione di implicazione

$\mathcal{O}_\rightarrow : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ (funzione binaria)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\rightarrow(0,0) &= 1\\ \mathcal{O}_\rightarrow(0,1) &= 1\\ \mathcal{O}_\rightarrow(1,0) &= 0\\ \mathcal{O}_\rightarrow(1,1) &= 1\end{aligned}$$

Funzioni di valutazione

Definizione: Funzione di doppia implicazione

$\mathcal{O}_{\leftrightarrow} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ (funzione binaria)

$$\mathcal{O}_{\leftrightarrow}(0,0) = 1$$
$$\mathcal{O}_{\leftrightarrow}(0,1) = 0$$
$$\mathcal{O}_{\leftrightarrow}(1,0) = 0$$
$$\mathcal{O}_{\leftrightarrow}(1,1) = 1$$

Tavole di Verità

Rappresentazione in forma tabellare: **tavole di verità**

Funzione di negazione

	$\neg$
0	1
1	0

Tavole di Verità

Rappresentazione in forma tabellare: **tavole di verità**

Funzione di negazione

	$\neg$
0	1
1	0

Funzioni dei connettivi binari

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Definizione: Assegnazione

Una *assegnazione* booleana $\mathcal{V}$ ai simboli proposizionali $\mathcal{P}$ è una funzione

$$\mathcal{V} : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$$

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Definizione: Assegnazione

Una *assegnazione* booleana $\mathcal{V}$ ai simboli proposizionali $\mathcal{P}$ è una funzione

$$\mathcal{V} : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$$

Definizione: Valutazione

Una *valutazione* booleana $I_{\mathcal{V}} : \text{Prop} \to \{0, 1\}$ è l'estensione all'insieme di tutte le proposizioni di un'assegnazione booleana, ovvero

$$\begin{gathered}
I_{\mathcal{V}}(A) = \mathcal{V}(A) \text{ se } A \in \mathcal{P}; \\
I_{\mathcal{V}}(\top) = 1; \\
I_{\mathcal{V}}(\bot) = 0; \\
I_{\mathcal{V}}(\neg\alpha) = \mathcal{O}_{\neg}(I_{\mathcal{V}}(\alpha)); \\
I_{\mathcal{V}}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{O}_{\circ}(I_{\mathcal{V}}(\alpha), I_{\mathcal{V}}(\beta))
\end{gathered}$$

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Definizione: Assegnazione

Una *assegnazione* booleana $\mathcal{V}$ ai simboli proposizionali $\mathcal{P}$ è una funzione

$$\mathcal{V} : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$$

Definizione: Valutazione

Una *valutazione* booleana $I_{\mathcal{V}} : \text{Prop} \to \{0, 1\}$ è l'estensione all'insieme di tutte le proposizioni di un'assegnazione booleana, ovvero

$$\begin{gathered} I_{\mathcal{V}}(A) = \mathcal{V}(A) \text{ se } A \in \mathcal{P}; \\ I_{\mathcal{V}}(\top) = 1; \\ I_{\mathcal{V}}(\bot) = 0; \\ I_{\mathcal{V}}(\neg\alpha) = \mathcal{O}_{\neg}(I_{\mathcal{V}}(\alpha)); \\ I_{\mathcal{V}}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{O}_{\circ}(I_{\mathcal{V}}(\alpha), I_{\mathcal{V}}(\beta)) \end{gathered}$$

Osservazione

Data una assegnazione Booleana $\mathcal{V}$, la valutazione $I_{\mathcal{V}}$ esiste ed è unica.

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Esempio

Tre amici, Antonio, Bruno e Carla, sono incerti se andare in pizzeria. Consideriamo tre *proposizioni atomiche*:

- A "Antonio va in pizzeria"
- B "Bruno va in pizzeria"
- C "Carla va in pizzeria"

Il giorno dopo sappiamo che: "Antonio non va in pizzeria, Bruno va in pizzeria, Carla va in Pizzeria".

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Esempio

Tre amici, Antonio, Bruno e Carla, sono incerti se andare in pizzeria.
Consideriamo tre *proposizioni atomiche*:

- A "Antonio va in pizzeria"
- B "Bruno va in pizzeria"
- C "Carla va in pizzeria"

Il giorno dopo sappiamo che: "Antonio non va in pizzeria, Bruno va in pizzeria, Carla va in Pizzeria". Formalmente abbiamo la seguente assegnazione:

$$\mathcal{V}(A) = 0,\ \mathcal{V}(B) = 1,\ \mathcal{V}(C) = 1.$$

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Esempio

Tre amici, Antonio, Bruno e Carla, sono incerti se andare in pizzeria. Consideriamo tre *proposizioni atomiche*:

- A "Antonio va in pizzeria"
- B "Bruno va in pizzeria"
- C "Carla va in pizzeria"

Il giorno dopo sappiamo che: "Antonio non va in pizzeria, Bruno va in pizzeria, Carla va in Pizzeria". Formalmente abbiamo la seguente assegnazione:

$$\mathcal{V}(A) = 0,\ \mathcal{V}(B) = 1,\ \mathcal{V}(C) = 1.$$

Calcoliamo la valutazione delle seguenti *proposizioni composte*:

- α "Tutti e tre sono andati in pizzeria", $\alpha = A \wedge B \wedge C$
- β "Almeno due sono andati in pizzeria", $\beta = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Esempio

Assegnazione: $\mathcal{V}(A) = 0$, $\mathcal{V}(B) = 1$, $\mathcal{V}(C) = 1$.

α "Tutti e tre sono andati in pizzeria", $\alpha = A \wedge B \wedge C$

Calcoliamo la valutazione di α:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}}(\alpha) = & \quad \mathcal{O}_{\wedge}(I_{\mathcal{V}}(A), I_{\mathcal{V}}(B \wedge C)) = \\ = & \quad \mathcal{O}_{\wedge}(0, \mathcal{O}_{\wedge}(I_{\mathcal{V}}(B), I_{\mathcal{V}}(C))) = \\ = & \quad \mathcal{O}_{\wedge}(0, \mathcal{O}_{\wedge}(1, 1)) = \\ = & \quad \mathcal{O}_{\wedge}(0, 1) = \\ = & \quad 0 \end{aligned}$$

Assegnazione e Valutazione (Interpretazione)

Esempio

Assegnazione: $\mathcal{V}(A) = 0$, $\mathcal{V}(B) = 1$, $\mathcal{V}(C) = 1$.

- β "Almeno due sono andati in pizzeria", $\beta = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Calcoliamo la valutazione di β:

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{V}}(\beta) = \;& \mathcal{O}_{\vee}(I_{\mathcal{V}}(A \wedge B), I_{\mathcal{V}}((A \wedge C) \vee (B \wedge C))) = \\
= \;& \mathcal{O}_{\vee}(\mathcal{O}_{\wedge}(I_{\mathcal{V}}(A), I_{\mathcal{V}}(B)), \mathcal{O}_{\vee}(I_{\mathcal{V}}(A \wedge C), I_{\mathcal{V}}(B \wedge C))) = \\
= \;& \mathcal{O}_{\vee}(\mathcal{O}_{\wedge}(0,1), \mathcal{O}_{\vee}(\mathcal{O}_{\wedge}(I_{\mathcal{V}}(A), I_{\mathcal{V}}(C)), \mathcal{O}_{\wedge}(I_{\mathcal{V}}(B), I_{\mathcal{V}}(C))) = \\
= \;& \mathcal{O}_{\vee}(0, \mathcal{O}_{\vee}(\mathcal{O}_{\wedge}(0,1), \mathcal{O}_{\wedge}(1,1)) = \\
= \;& \mathcal{O}_{\vee}(0, \mathcal{O}_{\vee}(0,1)) = \\
= \;& \mathcal{O}_{\vee}(0,1) = \\
= \;& 1
\end{aligned}$$

Tavole di Verità

Metodo per valutare la verità di una formula ben formata

Esempio

Costruiamo la tavola di verità della seguente formula

$$\alpha = \neg A \vee B \to A$$

Tavole di Verità

Metodo per valutare la verità di una formula ben formata

Esempio

Costruiamo la tavola di verità della seguente formula

$$\alpha = \neg A \vee B \rightarrow A$$

Occorre considerare tutte le sottoformule di α

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg A \vee B \rightarrow A$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Ogni riga corrisponde ad una *assegnazione* di A e B.
Ogni valore di verità nella tabella corrisponde alla *valutazione* di una sottoformula

Tavole di Verità

Metodo per valutare la verità di una formula ben formata α

A	B	C	...	...	...	...	α
0	0	0	...	...	...	...	...
0	0	1	...	...	...	...	...
0	1	0	...	...	...	...	...
0	1	1	...	...	...	...	...
1	0	0	...	...	...	...	...
1	0	1	...	...	...	...	...
1	1	0	...	...	...	...	...
1	1	1	...	...	...	...	...

In una formula con n **atomi** diversi, si hanno 2^n **possibili assegnazioni** di valori di verità.

Tavole di Verità

Esercizio

Costruiamo la tavola di verità della seguente formula

$$\alpha = A \rightarrow B \wedge C \vee (C \rightarrow \neg A)$$

Tavole di Verità

Esercizio

Costruiamo la tavola di verità della seguente formula

$$\alpha = A \rightarrow B \wedge C \vee (C \rightarrow \neg A)$$

A	B	C	$\neg A$	$B \wedge C$	$C \rightarrow \neg A$	$B \wedge C \vee (C \rightarrow \neg A)$	α
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Definizione: Soddisfazione

Una formula proposizionale α è *soddisfatta* da una valutazione booleana $I_{\mathcal{V}}$ se $I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$.

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Definizione: Soddisfazione

Una formula proposizionale α è *soddisfatta* da una valutazione booleana $I_\mathcal{V}$ se $I_\mathcal{V}(\alpha) = 1$.

Definizione: Soddisfacibilità

Una formula proposizionale α è *soddisfacibile* se è soddisfatta da una qualche valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Definizione: Soddisfazione

Una formula proposizionale α è *soddisfatta* da una valutazione booleana $I_{\mathcal{V}}$ se $I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$.

Definizione: Soddisfacibilità

Una formula proposizionale α è *soddisfacibile* se è soddisfatta da una qualche valutazione booleana $I_{\mathcal{V}}$.

Definizione: Tautologia

Una formula proposizionale α è *tautologica* se è soddisfatta da ogni valutazione booleana $I_{\mathcal{V}}$.

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Definizione: Soddisfazione

Una formula proposizionale α è *soddisfatta* da una valutazione booleana $I_\mathcal{V}$ se $I_\mathcal{V}(\alpha) = 1$.

Definizione: Soddisfacibilità

Una formula proposizionale α è *soddisfacibile* se è soddisfatta da una qualche valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.

Definizione: Tautologia

Una formula proposizionale α è *tautologica* se è soddisfatta da ogni valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.

Definizione: Contraddizione

Una formula proposizionale α è *contraddittoria* se non è soddisfatta da nessuna valutazione booleana $I_\mathcal{V}$.

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Osservazione

Per determinare se una formula α è soddisfacibile, tautologica o contradditoria, basta costruire la tabella di verità per α:

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Osservazione

Per determinare se una formula α è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria, basta costruire la tabella di verità per α:

- α è soddisfacibile sse l'ultima colonna contiene almeno un 1;

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Osservazione

Per determinare se una formula α è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria, basta costruire la tabella di verità per α:

- α è soddisfacibile sse l'ultima colonna contiene almeno un 1;
- α è una tautologia sse l'ultima colonna contiene solo 1;

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Osservazione

Per determinare se una formula α è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria, basta costruire la tabella di verità per α:

- α è soddisfacibile sse l'ultima colonna contiene almeno un 1;
- α è una tautologia sse l'ultima colonna contiene solo 1;
- α è una contraddizione sse l'ultima colonna contiene solo 0.

Soddisfacibilità, Tautologie e Contraddizioni

Osservazione

Per determinare se una formula α è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria, basta costruire la tabella di verità per α:

- α è soddisfacibile sse l'ultima colonna contiene almeno un 1;
- α è una tautologia sse l'ultima colonna contiene solo 1;
- α è una contraddizione sse l'ultima colonna contiene solo 0.

Teorema

Una formula α è una tautologia se e solo se $\neg\alpha$ è una contraddizione.

Implicazione ed equivalenza logica

Definizione: **Implicazione logica**

Diciamo che α *implica logicamente* β se e solo se ogniqualvolta $I_{\mathcal{V}}(\alpha) = 1$ anche $I_{\mathcal{V}}(\beta) = 1$. In tal caso, si dice che β è una *conseguenza logica* di α e si scrive $\alpha \models \beta$.

Implicazione ed equivalenza logica

Definizione: Implicazione logica

Diciamo che α *implica logicamente* β se e solo se ogniqualvolta $I_\mathcal{V}(\alpha) = 1$ anche $I_\mathcal{V}(\beta) = 1$. In tal caso, si dice che β è una *conseguenza logica* di α e si scrive $\alpha \models \beta$.

Osservazione: Ex falso quodlibet sequitur

Se α è una contraddizione, allora ogni proposizione è una conseguenza logica di α.

Implicazione ed equivalenza logica

Definizione: Implicazione logica

Diciamo che α *implica logicamente* β se e solo se ogniqualvolta $I_\mathcal{V}(\alpha) = 1$ anche $I_\mathcal{V}(\beta) = 1$. In tal caso, si dice che β è una *conseguenza logica* di α e si scrive $\alpha \models \beta$.

Osservazione: Ex falso quodlibet sequitur

Se α è una contraddizione, allora ogni proposizione è una conseguenza logica di α.

Definizione: Equivalenza logica

Diciamo che due proposizioni α e β sono *logicamente equivalenti* (o *tautologicamente equivalenti*) se e solo se $I_\mathcal{V}(\alpha) = I_\mathcal{V}(\beta)$ per ogni valutazione booleana $I_\mathcal{V}$. In tal caso, scriveremo $\alpha \equiv \beta$.

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Idempotenza

$$\alpha \land \alpha \equiv \alpha$$
$$\alpha \lor \alpha \equiv \alpha$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Idempotenza

$$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$$

$$\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$$

Associatività

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$
$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$$
$$\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Idempotenza

$$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$$
$$\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$$

Associatività

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$
$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$$
$$\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$$

Commutatività

$$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$$
$$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \leftrightarrow \alpha$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Distributività

$$\alpha \land (\beta \lor \gamma) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$$
$$\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Distributività

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$
$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

Assorbimento

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$$
$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Distributività

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$
$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

Assorbimento

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$$
$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$$

Doppia negazione

$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Leggi di De Morgan

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Leggi di De Morgan

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Terzo escluso

$$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \top$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Leggi di De Morgan

$$\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$$

Terzo escluso

$$\alpha \lor \neg\alpha \equiv \top$$

Contrapposizione

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$$

Equivalenza logica

Le seguenti formule sono logicamente equivalenti:

Leggi di De Morgan

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Terzo escluso

$$\alpha \vee \neg\alpha \equiv \top$$

Contrapposizione

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$$

Contraddizione

$$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \bot$$